TD MECANIQUE : Dynamique en référentiel galiléen

Exercice 1 : Point matériel attaché à un ressort

On s'intéresse au mouvement d'un point matériel M de masse m, attaché à un ressort dont l'autre extrémité est fixe dans le référentiel terrestre R (point O, origine du repère associé au référentiel). Son coefficient de raideur est k et sa longueur à vide l_o.
On distingue les deux cas d'un mouvement horizontal et d'un mouvement vertical.

1) Cas d'un mouvement horizontal

On suppose que le point matériel se déplace sans frottement (solide) le long de l'axe horizontal (Ox).
En appliquant la méthode d'étude dynamique d'un mouvement décrite en cours :

a) Déterminer l'abscisse x_e de M à l'équilibre ainsi que l'allongement du ressort à l'équilibre dans R.

b) A t=0, on déplace le point M de x_0 et on le lâche sans lui communiquer de vitesse initiale. On note $x' = x - x_e$ (déplacement par rapport à la position d'équilibre).
Donner l'équation différentielle vérifiée par x' et montrer que le point M effectue des oscillations sinusoïdales autour de sa position d'équilibre (résoudre l'équation différentielle à l'aide des conditions initiales). Déterminer la période des oscillations.

2) Cas d'un mouvement vertical

On suppose que le point matériel se déplace sans frottement (fluide) le long de l'axe vertical (Oz).
MEME ETUDE que le cas précédent.

Exercice 2 : Pendule simple

Un pendule est constitué d'un fil idéal de longueur constante l, fixé en O et auquel est suspendu un objet ponctuel M de masse m. L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = g.\overrightarrow{e_z}$ (avec g = 9,81 $m.s^{-2}$), $\overrightarrow{e_z}$ étant un vecteur unitaire de l'axe Oz vertical descendant du repère d'étude associé au référentiel terrestre, R_t. On néglige les frottements.
Le mouvement de M s'effectue dans le plan vertical (Oz,Ox). On note θ(t), l'angle orienté que fait la tige avec la verticale : $\theta = \left(\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM}\right)$.

1) A l'aide du principe fondamental de la dynamique appliqué à M dans R_t projeté sur la base polaire $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$, trouver deux équations liant θ (et ses dérivées temporelles $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$), T(tension du fil), l, m et g.

2) A l'aide de l'équation obtenue par projection du PFD sur $\overrightarrow{e_\theta}$, exprimer $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ, $\dot{\theta}_0^2 = \dot{\theta}^2(t = 0)$, l, θ_o et g.

On prendra $\theta_o = 0$.

3) En déduire l'expression de T en fonction de θ, $\dot{\theta}_0^2$, l, g et m.

4) Donner la valeur de l'angle maximal et discuter son existence. Donner la condition sur $\dot{\theta}_0^2$ pour que le mouvement soit pendulaire ou révolutif.

5) On suppose θ petit.

a) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par θ ?

b) Déterminer la période des petites oscillations et l'expression θ(t) dans le cas où $\theta(0) = \theta_o$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

Exercice 3 : Toboggan

Un enfant esquimau joue sur le toit de son igloo. Il se laisse glisser depuis le sommet de l'igloo qui a la forme d'une demi sphère de rayon a et de centre 0. La position de l'enfant, assimilé à un point matériel M de masse m est repéré par l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM}\right)$ avec (Oz) la verticale ascendante. On étudie le mouvement de M dans le référentiel terrestre associé au repère R $(0, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

1) A partir de quelle position (repérée par l'angle θ_0) l'enfant perd-il le contact avec l'igloo (on négligera les frottements) ?

Conseil : On exprimera la réaction du support en fonction de l'angle θ (même méthode que dans l'exercice 2 sur le pendule).

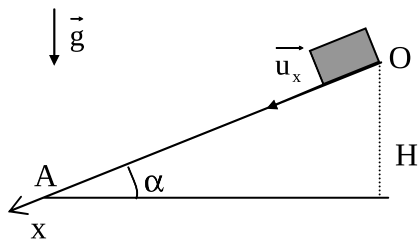
2) Quel est le mouvement ultérieur de l'enfant ?

On considèrera que le mouvement s'effectue dans le plan (x0z) et on donnera les équations horaires x(t) et z(t) en fonction de t (en prenant t=0 au moment de la perte de contact), g (module du champ de pesanteur), x_0, z_0, v_{0x} et v_{0z} (position et vitesse de l'enfant au moment de la perte de contact).

3) Quelle est la vitesse de l'enfant lorsqu'il tombe sur le sol ? Montrer que son module vérifie $\sqrt{2ga}$. Commenter.
Conseil : On déterminera tout d'abord le temps mis par l'enfant pour retomber au sol depuis la perte de contact avec l'igloo.

Exercice 4 : Glissement d'un solide sur un plan incliné

Un solide supposé ponctuel, de masse m, est déposé sans vitesse initiale à l'extrémité supérieure de la ligne de plus grande pente Ox d'un plan incliné d'angle α. On note H la distance de ce point initial O au plan horizontal et g l'accélération de la pesanteur supposée constante.



1) Absence de frottement

a) Déterminer l'accélération du mobile à l'instant t lorsque les frottements sont négligés.
b) En déduire la vitesse du mobile au point A. Commenter.

2) Existence de frottement de glissement

a) Quelle est la condition sur le coefficient f de frottement pour que le solide commence à glisser à l'instant t = 0.
Reprendre les questions du 1.

Rappel : Les actions de contact obéissent aux lois de Coulomb :

* **Absence de glissement** : M immobile sur le support S : $\left\|\overrightarrow{\mathbf{R_t}}\right\| \leq \mathbf{f_o}.\left\|\overrightarrow{\mathbf{R_n}}\right\|$ f_o coefficient statique de frottement
* **Glissement** du point matériel sur S : $\left\|\overrightarrow{\mathbf{R_t}}\right\| = \mathbf{f}.\left\|\overrightarrow{\mathbf{R_n}}\right\|$ f coefficient dynamique de frottement (f=0 en l'absence de frottement)